Descubriendo las MATEMÁTICAS

José Antonio **González Oreja**

PLANTEAMIENTO Y EXPECTATIVAS

> *Tú y yo –todos nosotros– podemos explorar el mundo interior y el mundo exterior mucho más de lo que pensamos. Muchos de nosotros cerramos las puertas demasiado pronto. Este libro está dedicado a todos aquellos que están deseando abrir las puertas cerradas, y abrir aún más las que ya están abiertas.* **[S. K. Stein]**

Así da inicio *Strength in Numbers. Discovering the Joy and Power of Mathematics in Everyday Life*, el libro que Sherman K. Stein (1996) escribió para "difundir el evangelio de las matemáticas". Y lo hizo convencido de que (casi) cualquiera puede entender y disfrutar de las matemáticas si está dispuesto a explorar –con curiosidad, diligencia e inteligencia– el mundo que nos rodea. La obra está dividida en tres secciones. La I, "Sobre las matemáticas", muestra cómo podemos protegernos de ciertos abusos en el uso de los números,[1] destruye algunos mitos sobre las matemáticas y sus estudiosos, o esboza sus aplicaciones a la vida real. En la II, "De la Prepa (*Highschool*) al Kínder", podemos encontrar algunas ideas frescas sobre el teorema de Pitágoras, el número π (pi), o la representación gráfica de ecuaciones. En fin, la III, "Más y más cerca", es una invitación al cálculo.

¿Difundir el evangelio de las matemáticas… 20 años después?

No hace falta ser muy ducho con las matemáticas para concluir que han pasado ya 20 años desde la publicación del libro de Stein que ahora nos ocupa. Siendo así, ¿por qué prestar nuestra atención a un libro que, por decirlo suavemente, no es de los más recientes?

Elementos es una revista que está dedicada a la divulgación científica, y el texto que ahora nos ocupa ahonda, y con razón, en la necesidad de expandir el conocimiento matemático para contribuir a erradicar la falta de cultura numérica que caracteriza a nuestra sociedad. Es más, las reflexiones matemáticas de Stein no tienen fecha de caducidad, no creemos necesario que un libro sea de los más recientes para que podamos hablar de él.

En total, 32 capítulos de factura heterogénea que a veces se tornan algo repetitivos (como en las muchas explicaciones ligadas al concepto de serie), pero generalmente de lectura entretenida.

SOBRE LAS MUCHAS FACETAS DE LAS MATEMÁTICAS

Para Stein las matemáticas son como el elefante descrito por tres sabios ciegos de la India: si nuestros conocimientos matemáticos se reducen a ejecutar cálculos aritméticos, entonces las matemáticas serán solo una herramienta; pero si somos capaces de utilizarlas para describir la fuerza de gravedad o la geometría de los cromosomas, entonces serán como el lenguaje del universo; o, tras completar un curso de geometría o cálculo, podrán convertirse en un medio para desarrollar nuestras capacidades en estudios superiores. Y hay muchas otras formas de sentir al elefante que son las matemáticas: si alguna vez percibimos la belleza que albergan sus descubrimientos y razonamientos, serán para nosotros también un arte; si pensamos en sus preguntas aún sin resolver, podremos compararlas con las regiones de la Tierra que todavía no han sido exploradas.

Para el autor de *Strength in Numbers*, de entre todas las materias las matemáticas pueden ser las que mejor se enseñen… o las que peor (lo que, desgraciadamente, es mucho más frecuente). De hecho, entre las razones que explican por qué está tan extendida esa variante matemática del analfabetismo que Paulos (1988) llamó *anumerismo*, cabe incluir la mala formación de los profesores de matemáticas. Pues, como apuntó Alsina (2008), incluso eminentes matemáticos han dejado clara su aversión a la enseñanza (como Hardy, quien dijo: “Odio enseñar”), aunque también ha habido figuras opuestas (vg., Poisson: “La vida es buena sólo por dos motivos: Para descubrir matemáticas y para enseñarlas”). En la enseñanza de las matemáticas todo debe tener sentido, pues si no comprendemos todos los pasos dados no podremos estar seguros de qué significan los símbolos con los que estamos trabajando. De la mano de un buen profesor, los estudiantes pueden realizar sus propios descubrimientos y encontrar muchos de los principios básicos que rigen el comportamiento de los números. En realidad, aprender matemáticas difiere en mucho de aprender otras ramas del saber. Cuando estudiamos, por ejemplo, la estructura del átomo, la anatomía de la célula, o la historia de Puebla en el siglo XIX, debemos confiar en quienes han generado el conocimiento; pero nada debe interponerse entre el estudiante de matemáticas y los conceptos e ideas que pretende aprehender.

En el capítulo 4 se nos advierte de algunos peligros que pueden desprenderse de la mera cuantificación; es decir, de la asociación de un único número con un concepto que puede ser de carácter multidimensional. Y nos recuerda Stein que esta es una costumbre muy extendida que puede conducir a resultados sin sentido y, quizás, dolorosos. El ejemplo de la inteligencia, “medido” muchas veces con el IQ, permite ilustrar el concepto de variable multidimensional que no puede expresarse propiamente con un simple número.

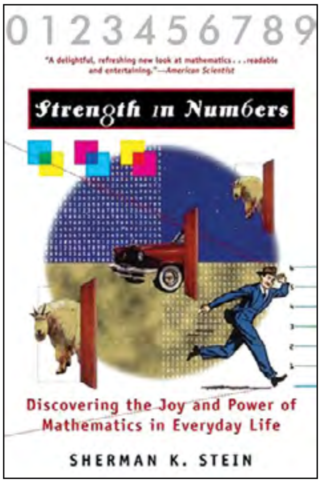

Figura 1. Portada. Stein SK. 1996. *Strength in Numbers. Discovering the Joy and Power of Mathematics in Everyday Life*. John Wiley & Sons, New York. 272 pp.

Creo que sigue siendo una lectura pertinente la obra de Gould (1981) sobre las formas (falaces) de “medir” la inteligencia (i.e., unidimensionalmente). Acerca del carácter multidimensional de la inteligencia, véase Armstrong (2009) o Gardner (2011). Es posible que el lector, a pesar de eso, quiera seguir poniendo a prueba su “inteligencia”; entonces, el libro de Carter (2008) es muy recomendable. En fin, para saber más sobre el origen evolutivo y el posible futuro de la inteligencia humana, ligado a un cerebro grande, véase el libro de Lynch y Granger (2008).

El capítulo 6 de *Strength in Numbers* desmiente algunas de las muchas ideas preconcebidas sobre el mundo de las matemáticas. Por ejemplo: (1) Hay un gen para las matemáticas. (2) No hay nada nuevo bajo el sol en el mundo de las matemáticas. (3) Todo lo que un matemático hace se limita a estudiar los números. (4) Los matemáticos alcanzan la cumbre de sus carreras profesionales antes de cumplir los 30 años. O, (5) no existe un Premio Nobel de matemáticas por cierto “asuntillo de faldas” entre un matemático y la esposa de Alfred Nobel. Todas estas creencias (falsas), y muchas otras, son parte del folklore que rodea no solo a las matemáticas, sino a muchas otras ramas del saber.[2] Contrástese con la sobria afirmación de Stein: “Cuando un teorema matemático se muestra sobre un pedazo de papel en mi escritorio, no hay nada más entre él y yo. De ahí, ningún mito espurio puede surgir y tomar vida propia”.

Más adelante, Stein explora las raíces de la invención. ¿Curiosidad o necesidad? Según Stein, lo que lleva a desarrollar grandes inventos es el impulso por responder a una pregunta, por explorar lo desconocido; i.e., la curiosidad. La Parte I se cierra con una reflexión sobre qué debería primar en la formación matemática de los estudiantes: ¿las habilidades de cálculo o la comprensión de la lógica del problema? No es una pregunta trivial, pues muchas veces se ha apostado por lo uno o lo otro, sin fundamento. Eso sí, la solución de Stein no acaba de convencerme. Para él, la forma de terminar con la vieja batalla pasa por explotar la naturaleza dual de las matemáticas y ofrecer tanto cursos dedicados al cálculo como otros enfocados al aparato conceptual y a la resolución de problemas. He sido profesor de materias relacionadas con la parte conceptual de la ecología y, también, de cursos más cuantitativos. Y lo cierto es que, una vez superado el curso teórico, los alumnos generalmente olvidaban su contenido; por lo que, para enfrentarse al aparato matemático necesario para resolver ciertos problemas, era necesario “invertir” gran cantidad de tiempo recordando sus bases conceptuales. Opino que la docencia de las matemáticas, o de cualquier otra ciencia, debería abordarse a la vez desde puntos de vista complementarios, tanto teóricos como cuantitativos.

PINCELADAS MATEMÁTICAS PARA TODOS LOS PÚBLICOS

La Parte II del libro *Strength in Numbers* recorre caprichosamente ciertas áreas de las matemáticas. En el capítulo 14, Stein nos recuerda que, quien se enfrenta a un libro de matemáticas debe estar seguro de que entiende todos los pasos y debe prestar a cada uno de ellos la máxima atención, pues el estudio de las matemáticas requiere de perfección. En el capítulo 15 se enfrenta a la tarea de leer y comprender números grandes que parecen estar más allá de los límites del razonamiento. Aparecen aquí herramientas que nos facilitan

© Daniel Machado. De la serie Homeless de Shibuya, 2008.

el trabajo, como la notación exponencial, y viejos conocidos, como el googol (un número grande: 10^{100}) y el *googolplex* (un número aún más grande: $10^{googol}=10^{10^{100}}$). En realidad, ambos están tan lejos del infinito como el 1... aunque ciertamente son más grandes que otros con los que estamos más o menos relacionados. Por ejemplo, el número de átomos del cuerpo humano está próximo a 1028, y el número total de partículas elementales en el Universo observable se acerca a 10^{80}. Aunque no tiene mucho sentido, podemos escribir un googol sin muchos problemas. Pero tratar de escribir un *googolplex* (sin usar la notación exponencial, se entiende) es una empresa condenada al fracaso (Sagan 1980): una hoja de papel lo suficientemente grande como para poder escribir en ella explícitamente todos los ceros de un googolplex no cabría en el universo conocido. Cabe añadir que se han propuesto otros números grandes, como el *googolduplex*[3] (a.k.a., *googolplexian*, *googolplexplex*, *googolplusplex* y otras "lindezas" similares), que es considerado hoy día como el número más grande con nombre propio: $10^{googolplex}=10^{10^{googol}}=10^{10^{10^{100}}}$. Por cierto que el número *googol* sirvió de "inspiración" a Larry Page y Serguéi Brin para dar nombre a Google, la exitosa compañía especializada en productos y servicios relacionados con Internet, dispositivos electrónicos y otras tecnologías.[4] Sus "cuarteles generales" en Santa Clara, California, se llaman *Googleplex* (un juego de palabras derivado de *Google* y complex, y una referencia al número *googolplex*). En todo caso, por encima de estos números "grandes" se encuentra la jungla infinita de números enteros, un reino que aún atesora habitantes que podrían permanecer siempre ocultos, lejos de los matemáticos más obstinados.

En el resto de la Parte II, Stein nos demuestra que todos podemos pensar de modo matemático: ordenadamente, por pasos, sin prisas por llegar al final, y con las ideas claras. Además, nos recuerda los principios básicos de las cinco operaciones que podemos hacer con dos números (si representamos por *a* y *b* dos números cualesquiera, podemos sumarlos, restarlos, multiplicarlos o dividirlos: $a+b$, $a-b$, $a \times b$, a/b, respectivamente;

© **Daniel Machado.** De la serie Homeless de Shibuya, 2008.

además, si b es un número entero, podemos multiplicar a por sí mismo b veces: a^b). Más adelante introduce el concepto de serie y nos enseña cómo determinar si la suma de sus términos es finita o infinita, animando al lector a que aplique lo aprendido. Aquellos que sigan teniendo dificultades con las fracciones harían bien en leer el capítulo 20, que nos guía a través de los números racionales. Y quienes quieran explorar el país de los números más allá del reino de las fracciones pueden atreverse con el capítulo 21 y avanzar a través de los números irracionales, como la raíz cuadrada de 2 (i.e., $\sqrt{2}$). La invitación es esta: si $\sqrt{2}$ no tiene un número finito de posiciones decimales, ¿qué clase de bestia salvaje puede ser? Ciertos números irracionales son bien conocidos, como el que describe la relación que hay entre la circunferencia de un círculo y su diámetro: π. Habita también la Parte II del libro de Stein el teorema de Pitágoras, que recibe su nombre en honor al filósofo y matemático de Samos, quien vivió en los siglos VI-V AEC. Ahora bien, hay evidencias de que la relación que existe entre los tres lados de un triángulo rectángulo era conocida por sabios de Babilonia y de China más de mil años antes de que Pitágoras diera con la prueba que pasó a la historia de las matemáticas tras ser incluida en los Elementos de Euclides. Véase, también, el capítulo “El teorema de Pitágoras” del libro de Paulos (1991). Como quiera que sea, Stein aplica el teorema a responder preguntas como esta: “Desde la cumbre de una montaña, ¿qué tan lejos puedes ver de la superficie de la Tierra?”. También aparecen las representaciones gráficas de las funciones que fueron posibles solo tras la fusión del álgebra y la geometría lograda por Descartes y Fermat en el siglo XVII. Y se cierra esta sección con un nuevo vistazo a las matemáticas del kínder, que nos lleva a cuestionar, de la mano del genial matemático Cantor, si los conjuntos de tamaño infinito son, todos, de la misma magnitud. La respuesta que dio Cantor conmocionó el mundo de las matemáticas y la lógica del siglo XX, tal y como ocurrió con el descubrimiento de los números irracionales entre los sabios de la Antigua Grecia.[5]

CERCA DEL FIN

La Parte III y última de *Strength in Numbers* se centra en algunos temas más avanzados. Entre ellos, por qué hay que ser cauto al intentar dividir cero entre cero; o cómo determinar la pendiente de una curva en un punto cualquiera; o cómo obtener el área de un polígono irregular, o de una figura curva. Ya Arquímedes fue capaz de aproximar el área bajo una curva, pero la respuesta exacta tuvo que esperar a Fermat. La Parte III es, obviamente, una invitación al cálculo, el estudio matemático de las cantidades sometidas al cambio. A pesar de que el cálculo fue "inventado" de modo independiente por Newton y Leibniz en el siglo XVII, sigue siendo una rama de las matemáticas en constante aplicación en el mundo del siglo XXI.

En el capítulo 32, que cierra el libro, el autor abandona la cautela que había mantenido desde el principio al no imponer su opinión sobre ciertas demostraciones matemáticas, y presenta una prueba que califica, sin dudarlo, como bella. ¿Por qué una demostración matemática puede ser bella? En palabras del autor: primero, se trata de una explicación con un fuerte componente visual; además, es breve; y, una vez que ha captado nuestra atención, resulta tan memorable como una sinfonía de Mozart, como si hubiera estado esperando en el cielo desde el principio de los tiempos a que alguien la descubriera y la trajera a la Tierra. Igualmente, Paulos (1991) observa que la belleza de una demostración está relacionada con su elegancia y brevedad, pues una demostración torpe introduce consideraciones extrañas y acaba por resultar enrevesada y redundante. Así pues, en matemáticas, como en el arte o en la música, también hay lugar para los gustos.

REFERENCIAS

Alsina C (2008). *El Club de la Hipotenusa. Un paseo por la historia de las matemáticas a través de sus anécdotas más divertidas* (171 pp.). Ariel, Barcelona.

Armstrong T (2009). *Multiple Intelligences in the Classroom* (246 pp.). ASCD, Alexandria.

Best J (2013). *Stat-Spotting. A Field Guide to Identify Dubious Data* (146 pp.). University of California Press, Berkeley.

Carter P (2008). *Advanced IQ Tests* (202 pp.). Kogan Page, London and Philadelphia.

Gardner H (2011). *Frames of Mind. The Theory of Multiple Intelligences* (467 pp.). Basic Books, New York.

Gould SJ (1981). *The Mismeasure of Man* (448 pp.). WW Norton & Co., New York.

Lynch G, Granger R (2008). *Big Brain. The Origins and Future of Human Intelligence* (259 pp.). Palgrave Macmillan, New York.

Paulos JA (1988). *Innumeracy. Mathematical Illiteracy and Its Consequences* (208 pp.). Vintage Books, New York.

Paulos JA (1991). *Beyond Numeracy. Ruminations of a Numbers Man* (285 pp.). Alfred A. Knopf, New York.

Sagan C (1980). *Cosmos* (365 pp.). Random House, New York.

Stein SK (1996). *Strength in Numbers. Discovering the Joy and Power of Mathematics in Everyday Life* (272 pp.). John Wiley & Sons, New York.

NOTAS

[1] Y es que los números, que parecen tan distantes, desprovistos de controversia y "fríos" (*cool*), pueden volverse "calientes" (*hot*): ser elásticos, cambiar fácilmente y despertar nuestro miedo en forma de supersticiones absurdas (como la que rodea, por ejemplo, al número 13). Para saber más sobre los *cool* y los *hot numbers*, véanse los capítulos 2 y 3 del libro de Stein. Ahora bien, una vez que se han aclarado ciertos detalles, los *hot numbers* dejan de acarrear esas connotaciones emocionales y ya no tienen más valor que un *cool number* cualquiera. Se trata, obviamente, de aplicar procedimientos básicos de pensamiento crítico: revisar las definiciones, las preguntas realizadas, las premisas ocultas... Véase Best (2013).

[2] La faceta más pintoresca y anecdótica de las matemáticas queda bien tratada en el ameno libro de Alsina (2008).

[3] Véase https://en.wikipedia.org/wiki/Names_of_large_numbers y http://www.googolplex.com/.

[4] Véase https://es.wikipedia.org/wiki/Google y https://es.wikipedia.org/wiki/Googleplex.

[5] Alsina (2008) recuerda que Hipaso de Metaponto, de la Escuela Pitagórica, puso en evidencia a su maestro al percatarse de que la diagonal de un cuadrado y el lado de este no podían expresarse como múltiplos de una unidad. Mientras que Pitágoras creía (inocentemente) que con solo números enteros y sus fracciones se podía describir todo el Universo, Hipaso comprendió que esto no era cierto. Lo que realmente condenó a Hipaso no fue este descubrimiento *per se*, sino romper el código de silencio por el que se regía la mística Escuela Pitagórica y divulgar la existencia de estos nuevos números al exterior.

José Antonio González Oreja
Escuela de Biología, BUAP
Puebla, México
jgonzorj@hotmail.com